BUKU AJAR

TEORI RING

DWI CAHYANI NUR APRIYANI, M.Pd.

LPPM Press
STKIP PGRI PACITAN

BUKU AJAR
TEORI RING

DWI CAHYANI NUR APRIYANI, M.Pd.

LPPM Press
STKIP PGRI PACITAN

BUKU AJAR
TEORI RING

iv + 50 hal, 17,6 cm x 25,0 cm
ISBN : ....

Cetakan Pertama, LPPM Press STKIP PGRI Pacitan

Penulis
Dwi Cahyani Nur Apriyani

Editor
Imam Muttaqin

Desain Sampul
Imam Muttaqin

Diterbitkan Oleh
LPPM Press STKIP PGRI Pacitan
Gedung B, Lantai 2 STKIP PGRI Pacitan
Telp. (0357) 881468
E-mail: lppm@stkippacitan.ac.id
http://lppm.stkippacitan.ac.id

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT atas nikmat, karunia, barakah, taufik dan hidayah-Nya sehingga handout/bahan ajar Mata Kuliah Matematika Diskret bagian Graf ini dapat diselesaikan.

Mata kuliah Teori Ring merupakan mata kuliah lanjutan dari mata kuliah Struktur Aljabar yang telah membahas konsep Grup. Pemberian mata kuliah Teori Ring pada mahasiswa pendidikan matematika bertujuan untuk mengembangkan pemahaman mahasiswa tentang konsep dasar struktur aljabar khususnya yang dilengkapi dengan 2 (dua) operasi biner. Penekanan mata kuliah ini pada kemampuan berfikir logis dan bernalar secara matematika dalam menyelesaikan masalah.

Mata kuliah ini dimaksudkan untuk memperkenalkan metode pemberian aksioma melalui perbincangan dari struktur aljabar. Isi pokok bahan ajar mata kuliah Teori Ring meliputi pemahaman tentang: (a) Ring atau Gelanggang; (b) Lapangan dan Daerah Integral, (c) Subring, Ideal dan Ring Faktor, dan (d) Homomorfisma Ring dan Teoremanya.

Untuk memudahkan kegiatan perkuliahan, disusunlah bahan ajar untuk Teori Ring ini dengan memperhatikan prinsip-prinsip dari teori beban kognitif (*cognitive load theory*).

Pacitan, September 2024
Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL i
IDENTITAS ii
PRAKATA iii
DAFTAR ISI iv
BAB 1 RING (GELANGGANG) 5
BAB 2 SIFAT-SIFAT RING 13
BAB 3 LAPANGAN 16
BAB 4 DAERAH INTEGRAL 20
BAB 5 SUBRING 22
BAB 6 TEOREMA SUBRING 24
BAB 7 IDEAL 25
BAB 8 TEOREMA IDEAL 27
BAB 9 RING FAKTOR 29
BAB 10 TEOREMA RING FAKTOR 31
BAB 11 HOMOMORFISMA RING 33
BAB 12 SIFAT HOMOMORFISMA RING 36
BAB 13 TEOREMA UTAMA HOMOMORFISMA RING 39
BAB 14 RING POLINOMIAL 41
BAB 15 FAKTORISASI POLINOM ATAS FIELD 44
BAB 16 POLINOM TEREDUKSI-TAK TEREDUKSI 48
DAFTAR PUSTAKA 50

BAB 1
RING (GELANGGANG)

Sebelumnya pada mata kuliah Struktur Aljabar, telah dipelajari tentang **grup**. Grup berkenaan dengan suatu himpunan yang tidak kosong dengan satu operasi biner. Dalam mata kuliah Teori Ring, akan dipelajari struktur aljabar yang melibatkan dua operasi biner atau lebih. Salah satu struktur aljabar yang menyertakan dua operasi biner adalah Ring (Gelanggang) yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1 Ring atau Gelanggang
Suatu himpunan tak kosong R dilengkapi dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ ditulis $\langle R, +, \cdot \rangle$ disebut **ring atau gelanggang** jika dipenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup abelian (komutatif)
   a. R tertutup terhadap penjumlahan yaitu $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$
   b. Penjumlahan di R bersifat asosiatif yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$
   c. R memuat elemen identitas (e) terhadap penjumlahan yaitu $\forall a \in R$ berlaku $a + e = e + a = a$
   d. Setiap elemen R memiliki invers penjumlahan yaitu $\forall a \in R, \exists(-a) \in R$ sedemikian hingga $a + (-a) = e$ dan $(-a) + a = e$
   e. Penjumlahan di R bersifat komutatif yaitu $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$
2. $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup
   a. R tertutup terhadap perkalian yaitu $\forall a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$
   b. Perkalian di R bersifat asosiatif yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Dua hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan di R dipenuhi
   a. Distributif kanan yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   b. Distributif kiri, yaitu $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Selanjutnya, notasi $a \cdot b$ akan ditulis ab saja.
Catatan:
1. Elemen identitas terhadap penjumlahan disebut **elemen nol** dan diberi simbol dengan z atau 0, tetapi dalam modul ini digunakan simbol e.
2. Invers penjumlahan dari $a \in R$ ditulis $-a$, dibaca lawan dari a atau negatif a.
3. Jika tidak ada keterangan tentang operasi-operasi biner $+$ dan $\cdot$ dari ring R maka $\langle R, +, \cdot \rangle$ disingkat R saja.

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh ring.

Contoh 1.2

Himpunan bilangan bulat, yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$ adalah ring atas operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat.

Bukti:

1. Berdasarkan postulat-postulat penjumlahan dipenuhi kondisi sebagai berikut:
   a. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup
   b. Penjumlahan di $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif
   c. $\mathbb{Z}$ memuat elemen identitas untuk penjumlahan yaitu 0
   d. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, terdapat suatu invers penjumlahan dari x di $\mathbb{Z}$ dinotasikan dengan $-x$, sedemikian hingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$
   e. Penjumlahan di $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif.
2. Berdasarkan postulat-postulat perkalian dipenuhi kondisi sebagai berikut:
   a. Operasi perkalian pada $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup
   b. Perkalian di $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif
3. Kedua hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan di $\mathbb{Z}$ dipenuhi.

Jadi $(\mathbb{Z}, +,\cdot)$ adalah ring.

Contoh 1.3

Jika $2\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan genap,maka $\langle 2\mathbb{Z}, +,\cdot\rangle$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalianbiasa pada himpunan $2\mathbb{Z}$.

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

1. $2\mathbb{Z}$ bersifat tertutup pada penjumlahan, karena penjumlahan setiap dua bilangan genap adalah bilangan genap pula.
2. Karena $2\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat) dan $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif penjumlahan, komutatif penjumlahan, asosiatif perkalian, bersifat distributif kiri maupun kanan perkalian terhadap penjumlahan, maka $2\mathbb{Z}$ juga bersifat demikian juga.
3. Perkalian pada $2\mathbb{Z}$ bersifat tertutup, karena hasil perkalian setiap dua bilangan genap adalah bilangan genap pula.
4. Pada $2\mathbb{Z}$ terdapat elemen identitas terhadap penjumlahan yaitu bilangan 0
5. Setiap elemen pada $2\mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap penjumlahan (invers penjumlahan dari bilangan genap adalah bilangan genap pula).

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\langle 2\mathbb{Z}, +,\cdot\rangle$ merupakan ring.

Contoh 1.4

Diberikan $K = \{a, b, c\}$ dilengkapi tabel penjumlahan dan perkalian sebagai berikut.

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	c	b
c	a	a	b

Tabel 1. Operasi penjumlahan dan perkalian pada K

Dari tabel di atas diperoleh $(b \cdot c) \cdot c = b \cdot c = b$ dan $b \cdot (c \cdot c) = b \cdot b = c$

Sehingga, $(b \cdot c) \cdot c \neq b \cdot (c \cdot c)$

Dengan demikian perkalian di K tidak bersifat asosiatif. Jadi, $\langle K, +, \cdot \rangle$ bukan ring.

Contoh 1.5

Jika $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional dan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real, maka terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa pada himpunan-himpunan tersebut, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ dan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, masing-masing merupakan ring. ***(Periksalah!)***

Contoh 1.6

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat.

Pada $\mathbb{Z}$ didefinisikan operasi penjumlahan biasa dan perkalian $\star$ yang didefinisikan dengan $a \star b = b$, untuk setiap a, b di $\mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, +, \star \rangle$ bukan merupakan ring. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka berlaku $(a + b) \star c = c$ dan $a \star c + b \star c = c + c = 2c$.

Sehingga, $(a + b) \star c \neq a \star c + b \star c$

Dengan demikian sifat distributif kiri di $\mathbb{Z}$ tidak terpenuhi. Jadi, $\langle 2\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ bukan merupakan ring.

Contoh 1.7

Misalkan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Pada $\mathbb{Z}_5$ didefinisikan penjumlahan modulo 5 $(+_5)$ dan perkalian modulo 5 $(\cdot_5)$ sebagai berikut.

$+_5$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\cdot_5$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tabel 2. Operasi penjumlahan dan perkalian modulo 5 pada $\mathbb{Z}_5$

Di teori grup telah diketahui bahwa $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ merupakan grup. Selanjutnya dari tabel perkalian modulo 5, dapat dilihat bahwa perkalian dua unsur di dalam $\mathbb{Z}_5$ tetap merupakan unsur dalam $\mathbb{Z}_5$ lagi. Ini berarti $\mathbb{Z}_5$ tertutup terhadap operasi perkalian. Sifat asosiatif terhadap perkalian modulo 5 dapat diselidiki satu per satu, demikian juga sifat distributif kiri dan distribusi kanannya ***(Periksalah!)***. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5 \rangle$ merupakan ring.

Contoh 1.8

Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan S himpunan fungsi-fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$, berarti $S = \{f : R \to R | f \text{ fungsi}\}$. Pada S didefinisikan penjumlahan dan perkalian fungsi, yaitu untuk setiap $f, g \in S$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dan $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Menggunakan definisi penjumlahan dan perkalian fungsi di atas, maka dapat dibuktikan dengan mudah bahwa penjumlahan dan perkalian fungsi di atas bersifat tertutup. Dengan demikian operasi penjumlahan dan perkalian fungsi di atas merupakan operasi biner pada S. Selanjutnya diselidiki sifat-sifat ring yang lain, sebagai berikut.

1. **Sifat asosiatif terhadap penjumlahan**

   Untuk sebarang $f, g, h \in S$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

   $\{(f + g) + h\}(x)$
   $= (f + g)(x) + h(x)$ *def. penjumlahan fungsi*
   $= \{f(x) + g(x)\} + h(x)$ *def. penjumlahan fungsi*
   $= f(x) + \{g(x) + h(x)\}$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{R}$
   $= f(x) + (g + h)(x)$ *def. penjumlahan fungsi*
   $= \{f + (g + h)\}(x)$ *def. penjumlahan fungsi*

   Ini berarti $(f + g) + h = f + (g + h)$, untuk setiap f, g, h di S.

2. **Terdapat elemen netral (nol) terhadap penjumlahan**

   Di dalam S terdapat fungsi nol θ yang didefinisikan dengan $\theta(x) = 0$ untuk setiap x di $\mathbb{R}$, sedemikian hingga untuk sebarang f di S dan x di $\mathbb{R}$, berlaku

   $(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x)$ *def. penjumlahan fungsi*
   $= f(x) + 0$ *def. fungsi nol*
   $= f(x)$

   dan

   $(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x)$ *def. penjumlahan fungsi*
   $= 0 + f(x)$ *def. fungsi nol*
   $= f(x)$

   Ini berarti $(f + \theta) = f = (\theta + f)$, untuk setiap f di S. Fungsi nol θ disebut elemen netral (nol) di S.

3. Terdapat elemen invers terhadap penjumlahan

Untuk setiap fungsi f di S terdapat fungsi $(-f)$ di S yang didefinisikan dengan $(-f)(x) = -f(x)$, untuk setiap x di $\mathbb{R}$, sedemikian hingga berlaku

$\big(f + (-f)\big)(x) = f(x) + (-f)(x)$ *def. penjumlahan fungsi*

$= f(x) - f(x)$ *def. fungsi* $(-f)$

$= 0 = \theta(x)$ *def. fungsi nol*

dan

$\big((-f) + f\big)(x) = (-f)(x) + f(x)$ *def. penjumlahan fungsi*

$= -f(x) + f(x)$ *def. fungsi* $(-f)$

$= 0 = \theta(x)$ *def. fungsi nol*

Ini berarti $\big(f + (-f)\big) = \theta = \big(f + (-f)\big)$, untuk setiap f di S. Fungsi $(-f)$ disebut elemen invers terhadap penjumlahan di S dari f.

4. Sifat komutatif terhadap penjumlahan

Untuk sebarang $f, g \in S$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ *def. penjumlahan fungsi*

$= g(x) + f(x)$ *sifat komutatif* $+$ *di* $\mathbb{R}$

$= (g + f)(x)$ *def. Penjumlahan fungsi*

Ini berarti $(f + g) = (g + f)$, untuk setiap f, g di S.

5. Sifat asosiatif terhadap perkalian

Untuk sebarang $f, g, h \in S$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$\{(fg)h\}(x)$

$= (fg)(x)h(x)$ *def. perkalian fungsi*

$= \{f(x)g(x)\}h(x)$ *def. perkalian fungsi*

$= f(x)\{g(x)h(x)\}$ *sifat asosiatif pada* $\mathbb{R}$

$= f(x)(gh)(x)$ *def. perkalian fungsi*

$= \{f(gh)\}(x)$ *def. perkalian fungsi*

Ini berarti $(fg)h = f(gh)$, untuk setiap f, g, h di S.

6. Sifat distributif kanan dipenuhi

Untuk sebarang $f, g, h \in S$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$\{(f + g)h\}(x)$

$= (f + g)(x)h(x)$ *def. perkalian fungsi*

$= \{f(x) + g(x)\}h(x)$ *def. penjumlahan fungsi*

$= f(x)h(x) + g(x)h(x)$ *sifat distributif kanan pada* $\mathbb{R}$

$= (fh)(x) + (gh)(x)$ *def. perkalian fungsi*

$= (fh + gh)(x)$ *def. perkalian fungsi*

Ini berarti $(f + g)h = fh + gh$, untuk setiap f, g, h di S.

Dengan cara serupa dapat ditunjukkan sifat distributif kiri juga terpenuhi. Karena semua syarat dipenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa $\langle S, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Berikut ini diberikan definisi mengenai ring dengan elemen satuan dan ring komutatif.

Definisi 1.9 Ring dengan elemen satuan dan Ring komutatif

Misal R adalah suatu ring. Jika terdapat suatu elemen e di R sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$, untuk setiap x di R, maka e disebut **elemen satuan** dan R dinamakan **ring dengan elemen satuan**.

Jika perkalian di R bersifat komutatif, maka R disebut **ring komutatif (ring abelian)**.

Contoh 1.10

Pada contoh 1.2 telah dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ adalah suatu ring. Berdasarkan pada postulat yang telah dikemukakan pada contoh 1.2, maka $\mathbb{Z}$ adalah suatu ring komutatif (karena operasi perkalian pada R bersifat komutatif) dan juga ring dengan elemen satuan (karena terdapat elemen 1, sedemikian hingga $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$).

Contoh 1.11

Pada contoh 1.3 telah dibuktikan bahwa $\langle 2\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring. Ring $2\mathbb{Z}$ adalah ring komutatif (karena operasi perkalian pada $2\mathbb{Z}$ bersifat komutatif) tetapi $2\mathbb{Z}$ bukanlah ring dengan elemen satuan (karena $1 \notin 2\mathbb{Z}$).

Contoh 1.12

Misalkan M adalah himpunan matriks berukuran 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ maka M merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

Ring M adalah ring dengan elemen satuan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, karena $AI = A = IA$, untuk setiap $A \in M$. Namun M bukanlah suatu ring komutatif karena berdasarkan sifat perkalian pada matriks, $AB \neq BA$.

Latihan Bab 1

1. Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat.
   Pada $\mathbb{Z}$ didefinisikan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\odot$ yang didefinisikan dengan untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \oplus b = a + b - 1$ dan $a \odot b = ab - (a + b) + 2$.
   Tunjukkan $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

2. Misalkan $\mathbb{Q}$ adalah himpunan semua bilangan rasional.
   Pada $\mathbb{Q}$ didefinisikan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\odot$ yang didefinisikan dengan untuk setiap $a, b \in \mathbb{Q}$ berlaku $a \oplus b = a + b + 1$ dan $a \odot b = ab + a + b$.
   Tunjukkan $\langle \mathbb{Q}, \oplus, \odot \rangle$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

3. Misalkan $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ adalah himpunan pasangan berurutan dari bilangan rasional.
   Pada $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ didefinisikan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\odot$ yang didefinisikan dengan untuk setiap $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ berlaku $(a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d)$ dan $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
   Tunjukkan $\langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \oplus, \odot \rangle$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.

4. Dipunyai himpunan $\mathbb{Z}\sqrt{2} = \left\{a + b\sqrt{2} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan biasa.
   a. Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ merupakan ring!
   b. Apakah $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ merupakan ring komutatif?
   c. Apakah $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ memuat elemen satuan?

5. Dipunyai himpunan $\mathbb{Q}\sqrt{2} = \left\{a + b\sqrt{2} \middle| a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan biasa.
   a. Tunjukkan bahwa $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ merupakan ring!
   b. Apakah $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ merupakan ring komutatif?
   c. Apakah $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ memuat elemen satuan?

6. Misalkan $\mathbb{Q}$ himpunan semua bilangan rasional dan
   $$M_2(\mathbb{Q}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$
   a. Tunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{Q})$ merupakan ring terhadap penjumlahan dan perkalian matriks merupakan ring!
   b. Apakah $M_2(\mathbb{Q})$ merupakan ring komutatif?
   c. Apakah $M_2(\mathbb{Q})$ memuat elemen satuan?

7. Tunjukkan bahwa $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ yaitu himpunan semua matriks segitiga atas berordo 2 yang semua elemennya bilangan real terhadap penjumlahan dan perkalian matriks adalah suatu ring.
8. Selidiki, apakah $P = \{[0], [3], [6], [9], [12]\}$ dengan penjumlahan dan perkalian modulo 15 merupakan suatu ring?
9. Misalkan $\langle R, + \rangle$ merupakan grup abelian. Tunjukkan bahwa $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan ring jika didefinisikan $a \cdot b = 0$ untuk setiap $a, b \in R$

BAB 2
SIFAT-SIFAT RING

Berikut ini disajikan sifat-sifat dasar dari ring.

Teorema 2.1

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan. Untuk sebarang $a, b, c \in R$, pernyataan-pernyataan berikut benar.

1. $a0 = 0a = 0$, dengan 0 adalah elemen netral di R
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
3. $(-a)(-b) = ab$
4. $-(a + b) = (-a) + (-b)$
5. $a(b - c) = ab - ac$
6. $(b - c)a = ba - ca$
7. $(-1)a = -a$, dengan 1 adalah elemen satuan di R.

Bukti:

1. Jelas $a \in R$ maka

$$\begin{aligned} a0 &= a(0+0) && \textit{sifat elemen netral 0} \\ a0 &= a0 + a0 && \textit{sifat distributif kanan} \\ -(a0) + a0 &= -a0 + (a0 + a0) && \\ 0 &= (-a0 + a0) + a0 && \textit{sifat invers, asosiatif} \\ 0 &= 0 + a0 && \textit{sifat invers} \\ 0 &= a0 && \textit{sifat elemen nol} \end{aligned}$$

   Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $0a = 0$.

2. Langkah menunjukkan $a(-b) = -(ab)$, yaitu terlebih dahulu ditunjukkan bahwa $ab + a(-b) = 0$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} ab + a(-b) &= a\{b + (-b)\} && \textit{sifat distributif kanan} \\ &= a0 && \textit{sifat elemen nol} \\ &= 0 && \end{aligned}$$

   Ini berarti $a(-b) = -(ab)$.

   Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $(-a)b = -(ab)$.

3. Dengan menggunakan hasil 2 diperoleh.

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -[a(-b)] && \textit{sifat 2} \\ &= -[-(ab)] && \textit{sifat 2} \\ &= ab && \textit{sifat invers } -(-x) = x \end{aligned}$$

Pembuktian 4 sampai dengan 7 diserahkan pada pembaca. ***(Buktikan!)***

Pada definisi elemen satuan di ring, ada kemungkinan terdapat lebih dari satu elemen satuan pada ring R. Teorema di bawah ini menjamin bahwa kemungkinan tersebut tidak mungkin terjadi.

Teorema 2.2

Jika R adalah suatu ring dengan elemen satuan, maka elemen satuan tersebut tunggal.

Bukti:

Misalkan e_1 dan e_2 adalah elemen satuan di R.

Perhatikan bahwa $e_1 \cdot e_2 = e_1$ karena e_2 adalah elemen satuan. Di sisi lain, $e_1 \cdot e_2 = e_2$ karena e_1 adalah elemen satuan. Akibatnya $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$.

Telah ditunjukkan bahwa elemen satuan di R adalah tunggal.

Pada ring dengan elemen satuan, perlu dipertimbangkan adanya invers terhadap perkalian. Berikut ini diberikan definisi mengenai invers terhadap perkalian.

Definisi 2.3 Invers Perkalian

Misal R adalah suatu ring dengan elemen satuan e dan misalkan $a \in R$. Jika terdapat suatu elemen x di R sedemikian hingga $ax = xa = e$, maka x disebut **invers perkalian dari a**.

Teorema 2.4

Misalkan R adalah suatu ring dengan elemen satuan e. Jika elemen $a \in R$ memiliki invers perkalian, maka invers perkalian dari a adalah tunggal.

Bukti:

Misalkan x dan y adalah invers perkalian dari a.

Perhatikan bahwa $ax = xa = e$, karena x adalah invers perkalian dari a serta $ay = ya = e$, karena y adalah invers perkalian dari a.

Akibatnya

$$
\begin{aligned}
x &= ex && \textit{sifat elemen identitas} \\
&= (ya)x && \textit{karena } ya = e \\
&= y(ax) && \textit{asosiatif} \\
&= ye && \textit{karena } ax = e \\
&= y && \textit{sifat elemen identitas}
\end{aligned}
$$

Telah ditunjukkan bahwa invers perkalian dari a adalah tunggal.

Pada pembahasan selanjutnya invers perkalian dari a akan dinotasikan dengan a^{-1}.

Latihan Bab 2

1. Lengkapilah bukti Teorema 2.1.
2. Jika R merupakan ring dan $a, b \in R$, maka buktikan bahwa
$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$
3. Pada setiap ring, jika berlaku $ab = -ba$, maka buktikan bahwa
$$(a+b)^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2$$
4. Ring R disebut **ring boolean** jika untuk setiap $a \in R$ berlaku $a^2 = a$.
   a. Tunjukkan untuk setiap $a \in R$ berlaku $a = -a$
   b. Tunjukkan bahwa jika R ring boolean maka R ring komutatif
5. Misalkan $\langle R, + \rangle$ grup abelian
   Didefinisikan operasi perkalian pada R dengan ketentuan $a \cdot b = 0$ untuk setiap $a, b \in R$
   Buktikan bahwa $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan ring
6. Tunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ jika dan hanya jika R ring komutatif

BAB 3
LAPANGAN

Definisi 3.1 Lapangan (field)

Misalkan F adalah suatu ring. Ring F disebut **lapangan (field) atau medan** jika syarat-syarat berikut ini dipenuhi.

1. F adalah ring komutatif.
2. F memiliki elemen satuan e dan $e \neq 0$.
3. Setiap elemen tak nol di F memiliki invers perkalian.

Contoh 3.2

Misalkan $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring himpunan bilangan riil. Ring $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ adalah suatu lapangan. Pembuktiannya sebagai berikut.

1. Operasi perkalian pada $\mathbb{R}$ bersifat komutatif. Ini berarti $\mathbb{R}$ adalah ring komutatif.
2. Jelas pada ring $\mathbb{R}$ terdapat elemen satuan $e \neq 0$ yaitu 1 karena $\forall a \in \mathbb{R}$ berlaku $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
3. Setiap elemen tak nol di F memiliki invers perkalian.

   Diambil sebarang $a \in \mathbb{R}$, dengan $a \neq 0$ maka terdapat $b = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sehingga $a \cdot b = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ serta $b \cdot a = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. Berarti setiap $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ memiliki invers perkalian yaitu $\frac{1}{a}$.

Jadi R adalah suatu lapangan.

Contoh 3.3

Pada contoh 1.2 telah dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ adalah suatu ring, tetapi ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ bukanlah suatu lapangan karena syarat 3 pada Definisi 3.1 tidak dipenuhi, karena ada elemen tak nol anggota $\mathbb{Z}$ misalnya 2, tetapi tidak ada $b \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $2 \cdot b = b \cdot 2 = 1$.

Definisi 3.4 Ring Pembagian

Jika R adalah ring dengan elemen satuan tetapi tidak komutatif, dan setiap elemen tidak nolnya mempunyai invers terhadap perkalian maka R disebut **ring pembagian (division ring)**.

Jelas bahwa perbedaan antara lapangan dan division ring hanya pada sifat komutatifnya terhadap perkalian saja.

Selanjutnya, sebelum dibahas mengenai salah satu kelas khusus ring, yaitu daerah integral (integral domain), berikut ini akan diberikan terlebih dahulu definisi pembagi nol.

Definisi 3.5 Pembagi Nol

Misalkan $\langle R, +, \cdot \rangle$ ring. Jika a dan b keduanya elemen tak nol di R sedemikian hingga $ab = 0$, maka a dan b dinamakan **pembagi nol**.

Contoh 3.6

Pada contoh 1.7, dapat dilihat bahwa perkalian dua elemen $a, b \in \mathbb{Z}_5$ bernilai $\overline{0}$ hanya jika salah satu elemen tersebut $\overline{0}$.

Namun pada ring $\mathbb{Z}_{12}$, perkalian dua elemen $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$ dapat dilihat pada tabel berikut.

$\cdot_{12}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Perhatikan bahwa $\overline{2} \cdot \overline{6} = \overline{6} \cdot \overline{2} = \overline{0}$, sehingga $\overline{2}$ dan $\overline{6}$ merupakan pembagi nol pada ring $\mathbb{Z}_{12}$.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan pula bahwa $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, dan $\overline{10}$ juga merupakan pembagi nol pada ring $\mathbb{Z}_{12}$.

Dengan demikian, pada ring $\mathbb{Z}_{12}$, elemen-elemen $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, dan $\overline{10}$ merupakan pembagi nol.

Perhatikan bahwa elemen-elemen tersebut persis merupakan elemen yang tidak relatif prima dengan $\overline{12}$, yaitu yang Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dengan $\overline{12}$ bukanlah $\overline{1}$.

Teorema 3.7
Pembagi nol pada ring $\mathbb{Z}_n$ adalah elemen-elemen tak nol di $\mathbb{Z}_n$ yang tidak relatif prima pada n

Bukti:

Ambil sebarang $m \in \mathbb{Z}_n - \{0\}$

Kasus 1 m dan n tidak relatif prima

Misal $(m, n) = d \neq 1$ (FPB antara m dan n yaitu $d \neq 1$)

maka diperoleh $\frac{n}{d} \in Z_n - \{0\}$

sehingga $m\left(\frac{n}{d}\right) = \left(\frac{m}{d}\right)n$

jadi $m\left(\frac{n}{d}\right)$ merupakan kelipatan n

akibatnya $m\left(\frac{n}{d}\right) = 0$

Dengan demikian terdapat $m, \left(\frac{n}{d}\right) \in \mathbb{Z}_n - \{0\}$ tetapi $m\left(\frac{n}{d}\right) = 0$

Jadi apabila m dan n tidak relatif prima maka m merupakan pembagi nol dalam $\mathbb{Z}_n$

Kasus 2 m dan n relatif prima

ambil $s \in \mathbb{Z}_n$ dengan $ms = 0$

maka $n|ms$

karena $(m, n) = 1$ maka $n|s$

akibatnya $s = 0$

oleh karena jika $ms = 0$ mengakibatkan $s = 0$ maka m bukan pembagi nol

Berdasarkan kasus 1 dan 2, terbukti bahwa elemen-elemen pembagi nol pada ring $\mathbb{Z}_n$ adalah elemen yang tidak relatif prima pada n (mempunyai FPB tak nol dan bukan 1).

Akibat 3.8
Jika p merupakan bilangan prima, maka ring $\mathbb{Z}_p$ tidak mempunyai pembagi nol. **(*Buktikan!*)**.

Apabila $\langle R, +, \cdot \rangle$ ring maka $\langle R, + \rangle$ grup. Akibatnya hukum kanselasi dipenuhi dalam $\langle R, + \rangle$. Tetapi hukum kanselasi terhadap operasi perkalian belum tentu dipenuhi dalam sebarang ring R.

Teorema 3.9
Misalkan $\langle R, +, \cdot \rangle$ ring. Hukum kanselasi terhadap operasi perkalian berlaku di R jika dan hanya jika R tidak memuat pembagi nol.
(*Buktikan!*).

Latihan Bab 3
1. Temukan semua solusi dari persamaan $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ di $\mathbb{Z}_{12}$
2. Selesaikan persamaan $3x = 2$ di $\mathbb{Z}_7$ dan $\mathbb{Z}_{23}$
3. Temukan semua solusi dari persamaan $x^2 + 2x + 2 = 0$ di $\mathbb{Z}_6$
4. Temukan semua solusi dari persamaan $x^2 + 2x + 4 = 0$ di $\mathbb{Z}_6$
5. Tunjukkan bahwa $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ merupakan pembagi nol pada $M_2(\mathbb{Z})$
6. Tentukan semua pembagi nol pada ring $\mathbb{Z}_6$
7. Suatu elemen a di ring R dinamakan **idempotent** apabila $a^2 = a$. Tunjukkan bahwa ring pembagian tepat mempunyai dua elemen idempotent.

8. Misalkan R ring memuat paling sedikit dua elemen dan untuk setiap elemen tak nol $a \in R$ terdapat dengan tunggal $b \in R$ sehingga $aba = a$.
   a. Tunjukkan bahwa R tidak mempunyai pembagi nol
   b. Tunjukkan bahwa $bab = b$
   c. Tunjukkan bahwa R mempunyai elemen satuan
   d. Tunjukkan bahwa R merupakan ring pembagian
9. Buktikan Akibat 3.8
10. Buktikan Teorema 3.9
11. Buktikan jika $a \neq \pm 1$ dan $a^2 = 1$, maka $a + 1$ dan $a - 1$ masing-masing merupakan pembagi nol
12. Buktikan jika ab merupakan pembagi nol, maka a atau b juga pembagi nol
13. Misalkan $ab \neq 0$ pada suatu ring komutatif. Buktikan jika a atau b merupakan pembagi nol, maka ab juga pembagi nol.

BAB 4
DAERAH INTEGRAL

Definisi 4.1 Daerah Integral (Integral Domain)
Suatu ring komutatif R disebut **daerah integral (integral domain)** jika R tidak memiliki pembagi nol.

Contoh 4.2
$\mathbb{Z}$ adalah suatu daerah integral.
Bukti:
Jelas bahwa $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif. Untuk membuktikan bahwa $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral, yaitu dengan menunjukkan $\mathbb{Z}$ tidak memuat pembagi nol.
Ambil sebarang $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$.
Untuk persamaan $ab = 0$, dengan $a \neq 0$ maka haruslah $b = 0$.
Ini berarti tidak ada $b \neq 0 \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi persamaan $ab = 0$.
Jadi $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ adalah suatu daerah integral.

Teorema 4.3
Setiap lapangan merupakan daerah integral
Bukti:
Misalkan F lapangan
Ambil sebarang $a, b \in F$ dengan $ab = 0$
Akan ditunjukkan $a = 0$ atau $b = 0$
Misalkan $a \neq 0$
Karena F lapangan maka terdapat $a^{-1} \in F$ sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
Dengan demikian

$$
\begin{aligned}
ab &= 0 \\
a^{-1}(ab) &= a^{-1}0 \\
(a^{-1}a)b &= 0 \\
1b &= 0 \\
b &= 0
\end{aligned}
$$

Telah ditunjukkan bahwa jika $ab = 0$ dengan $a \neq 0$ maka $b = 0$ di F
Jadi tidak ada pembagi nol di F
Oleh karena F merupakan ring komutatif maka teorema telah terbukti.

Teorema 4.4
Setiap daerah integral berhingga merupakan lapangan ***(Buktikan!)***

Akibat 4.5
Jika p merupakan bilangan prima maka $\mathbb{Z}_p$ merupakan lapangan ***(Buktikan!)***

Latihan Bab 4

1. Tunjukkan bahwa ring komutatif D adalah daerah integral jika dan hanya jika untuk $a, b, c \in D$ dengan $a \neq 0$, relasi $ab = ac$ mengakibatkan $b = c$ (berlaku sifat kanselasi).
2. Buktikan Teorema 4.4
3. Buktikan Akibat 4.5
4. Pada sebarang integral domain, buktikan jika $a^2 = b^2$ maka $a = \pm b$

BAB 5
SUBRING

Definisi 5.1 Subring

Subset tak kosong S dari ring R disebut subring dari ring R jika S juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama dengan operasi-operasi pada R.

Jelas setiap himpunan merupakan himpunan bagian dari dirinya sendiri, akibatnya R juga merupakan subring dari ring R sendiri. Begitu pula, jika 0 merupakan elemen netral (nol) di dalam ring R, maka $S = \{0\}$ juga memenuhi sifat-sifat ring. Ini berarti $S = \{0\}$ juga merupakan subring dari ring R. Dengan demikian setiap ring R memenuhi paling sedikit mempunyai dua subring yaitu R dan $\{0\}$. Selanjutnya $\{0\}$ disebut **subring trivial** dan R disebut **subring tidak sejati**, sedangkan subring yang lain (jika ada) disebut **subring sejati**. Berikut diberikan beberapa contoh subring.

Contoh 5.2

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah subring dari ring himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Selanjutnya, himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah subring dari himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Sedangkan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ bukan subring dari ring himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$.

Contoh 5.3

Himpunan fungsi-fungsi bernilai real yang terdeferensialkan pada [0,1] adalah subring dari ring himpunan fungsi-fungsi bernilai real kontinu pada [0,1] terhadap operasi penjumlahan dan perkalian fungsi.

Teorema 5.4

Subset tidak kosong S dari ring R merupakan subring jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b \in S$ dan $ab \in S$

Bukti:

$\Rightarrow$ Misalkan S adalah subring dari ring R.

Maka untuk sebarang $b \in S$ diperoleh $-b \in S$

Selanjutnya untuk sebarang $a \in S, -b \in S$ berlaku

$$a + (-b) \in S$$

Serta untuk sebarang $a \in S, b \in S$ berlaku $ab \in S$

$\Leftarrow$ Misalkan untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b \in S$ dan $ab \in S$.
Dengan menggunakan sifat-sifat ini diperoleh

- $a \in S, a \in S \Longrightarrow 0 = a - a \in S$
- $0 \in S, a \in S \Longrightarrow -a = 0 - a \in S$
- $a \in S, b \in S \Longrightarrow a, -b \in S \Longrightarrow a -(-b) \in S \Longrightarrow a + b \in S$

dan dari permisalan di atas, maka $a \in S, b \in S \Longrightarrow ab \in S$

Jadi S tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, terdapat elemen netral (nol) di dalam S dan setiap elemen S di dalam S mempunyai elemen negatifnya di dalam S.

Selanjutnya karena S merupakan subset dari R, setiap elemen dari S juga elemen dari R, maka di dalam S juga berlaku sifat komutatif dan asosiatif terhadap penjumlahan dan di dalam S juga berlaku sifat asosiatif terhadap perkalian serta berlaku sifat distributif kiri dan kanan.

Ini berarti S terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama dengan operasi pada R merupakan ring. Berdasarkan definisi subring, maka S merupakan subring dari ring R.

Latihan Bab 5

1. Tunjukkan bahwa himpunan $\{x + \sqrt{3}y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subring dari $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$
2. Subset dari $M_2(\mathbb{R})$ yang terdiri dari semua matriks berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ merupakan subring dari $M_2(\mathbb{R})$
3. Misalkan R adalah ring komutatif dan S adalah subring dari R. Apakah S juga merupakan subring komutatif? Berikan penjelasan!
4. Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan dan S adalah subring dari R. Apakah S juga merupakan subring dengan elemen satuan? Berikan penjelasan!
5. Berikan contoh ring dengan elemen satuan 1 tetapi mempunyai subring dengan elemen satuan tidak sama dengan 1.

BAB 6
TEOREMA SUBRING

Teorema 6.1
Jika S dan T merupakan subring dari ring R, maka $S \cap T$ juga merupakan subring dari ring R.
Bukti:
Ambil sebarang $a, b \in S \cap T$. Ini berarti $a, b \in S$ dan $a, b \in T$.
Karena S dan T merupakan subring dari ring R, maka berlaku $a - b, ab \in S$ dan $a - b, ab \in T$. Akibatnya $a - b, ab \in S \cap T$.
Jadi $S \cap T$ merupakan subring dari ring R.

Latihan Bab 6
1. Misalkan S dan T merupakan subring dari ring R. Apakah $S \cup T$ juga merupakan subring dari R? Berikan penjelasan!
2. Buktikan bahwa interseksi sebarang koleksi (hingga atau tak hingga) dari subring dari ring R merupakan subring dari ring R!
3. Buktikan bahwa interseksi koleksi semua subring yang memuat M dari ring R adalah subring terkecil dari ring R yang memuat M.
4. Buktikan bahwa interseksi koleksi semua subfield (sublapangan) dari ring R juga merupakan subfield.

BAB 7
IDEAL

Definisi berikut menyajikan beberapa pengertian ideal (ideal kiri, ideal kanan, dan ideal dua sisi). Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh dan sifat-sifatnya.

Definisi 7.1 Ideal

Subring S dari ring R disebut

1. **Ideal kanan** dari ring R jika berlaku $a \in S, r \in R \Longrightarrow ar \in S$
2. **Ideal kiri** dari ring R jika berlaku $a \in S, r \in R \Longrightarrow ra \in S$
3. **Ideal** (ideal dua sisi) dari ring R jika berlaku $a \in S, r \in R \Longrightarrow ar, ra \in S$

Jelas bahwa $\{0\}$ dan R merupakan ideal dari sebarang ring R. Selanjutnya $\{0\}$ disebut **ideal trivial** dari R serta R disebut **ideal tak sejati** dari R, sedangkan ideal yang lain disebut **ideal sejati**. Ring yang tidak mempunyai ideal sejati disebut **ring sederhana (*simple ring*)**. Berdasarkan definisi di atas, jelas bahwa ideal kiri dari ring komutatif juga merupakan ideal kanan, dan sebaliknya.

Contoh 7.2

Jika $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan semua bilangan bulat dan $2\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat genap, maka $\mathbb{Z}$ merupakan ring dan $2\mathbb{Z}$ merupakan subring dari ring $\mathbb{Z}$ dan sekaligus merupakan ideal dua sisi.

Contoh 7.3

Jika $\mathbb{Q}$ merupakan ring himpunan semua bilangan rasional dan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan semua bilangan bulat, maka $\mathbb{Z}$ merupakan subring dari $\mathbb{Q}$, tetapi bukan merupakan ideal kiri maupun ideal kanan dari $\mathbb{Q}$.

Teorema 7.4

Subset tidak kosong I dari ring R merupakan ideal dari R jika dan hanya jika

1. untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a - b \in I$
2. untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar, ra \in I$

Bukti:

$\Rightarrow$ Diasumsikan bahwa I merupakan ideal dari ring R.
Akibatnya I merupakan subring dari R dan berdasarkan teorema 4.4 berlaku $a \in I, b \in I \Rightarrow a - b \in I$
Serta berdasarkan definisi ideal berlaku $a \in I, r \in R \Longrightarrow ar, ra \in I$

$\Leftarrow$ Diasumsikan bahwa I adalah subset tak kosong dari ring R yang memenuhi sifat 1 dan 2

Akan ditunjukkan I merupakan subring dari R

Ambil sebarang $a, b \in I$

Berdasarkan sifat 1 diperoleh $a \in I, b \in I \Longrightarrow a - b \in I$

Selanjutnya jika $b \in I$ maka $b \in R$ dan berdasarkan sifat 2 diperoleh $a \in I, b \in I \Rightarrow a \in I, b \in R \Rightarrow ab, ba \in I$

Ini berarti I adalah subring dari ring R.

Oleh karena I adalah subring dari ring R yang juga memenuhi sifat 2, maka I adalah ideal dari ring R.

Latihan Bab 7

1. Berikan sebuah contoh ideal kanan yang bukan ideal kiri dan sebaliknya!
2. Buktikan bahwa setiap lapangan tidak memuat ideal sejati
3. Buktikan bahwa jika S ideal dari ring R dan $1 \in S$, maka $S = R$.
4. I dan J merupakan ideal-ideal dari ring R dan $I + J = \{x + y | x \in I, y \in J\}$. Buktikan $I + J$ juga ideal dari R.

BAB 8
TEOREMA IDEAL

Teorema 8.1
Interseksi dari sebarang dua ideal dari ring R juga merupakan ideal dari ring R tersebut.

Bukti:
Misalkan I dan J sebarang dua ideal dari ring R.
Akibatnya I dan J merupakan subring dari R.
Berdasarkan Teorema 5.1, maka $I \cap J$ merupakan subring dari R.
Ambil sebarang $a \in I \cap J$ dan sebarang $r \in R$.
Akibatnya $a \in I, a \in J$ dan $r \in R$.
Karena I dan J ideal, maka $ar, ra \in I$ dan $ar, ra \in J$.
Akibatnya $ar, ra \in I \cap J$.
Oleh karena $\forall a \in I \cap J, r \in R$ berlaku $ar, ra \in I \cap J$ maka $I \cap J$ merupakan ideal dari ring R.

Teorema 8.2
Jika M adalah himpunan bagian tak kosong dari ring R, maka interseksi dari koleksi semua ideal dari R yang memuat M adalah ideal terkecil dari R yang memuat M.

Bukti:
Misalkan $\{J_\alpha : \alpha \in I, I \text{ himpunan indeks}\}$ adalah koleksi semua ideal dari R yang memuat M.
Dengan menggunakan definisi ideal maka J_α merupakan subring dari ring R yang memuat M, untuk setiap $\alpha \in I$.
Karena interseksi semua subring dari ring R yang memuat M adalah subring terkecil dari ring R yang memuat M, maka $H = \cap \{J_\alpha : \alpha \in I, I \text{ himpunan indeks}\}$ merupakan subring terkecil dari R yang memuat M.
Ambil sebarang $h \in H, r \in R$.
Maka $h \in J_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in I$.
Karena J_α merupakan ideal dari ring R untuk setiap $\alpha \in I$, maka $hr, rh \in J_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in I$.
Ini berarti untuk setiap $h \in H, r \in R$ berlaku $hr, rh \in H$.
Jadi $H = \cap \{J_\alpha : \alpha \in I, I \text{ himpunan indeks}\}$ merupakan ideal terkecil dari R yang memuat M.

Selanjutnya ideal H di atas disebut ideal yang dibangun oleh M dan dinotasikan dengan $H = \langle M \rangle$.

Definisi 8.3 Ideal Utama

Ideal dari suatu ring yang dibangun oleh elemen tunggal dari ring tersebut disebut **ideal utama**. Jika ideal I dibangun oleh elemen tunggal a maka dituliskan $I = \langle a \rangle$.

Jelas bahwa himpunan semua bilangan bulat genap $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal utama yang dibangun oleh elemen 2 dari ring himpunan semua bilangan bulat Z, selanjutnya dituliskan dengan $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle$.

Definisi 8.4 Ring Ideal Utama

Ring komutatif R tanpa pembagi nol dan dengan elemen satuan dikatakan **ring ideal utama** jika setiap ideal dari ring R merupakan ideal utama.

Latihan Bab 8

1. Misalkan R ring dan $a \in R$. Buktikan bahwa $\{na + xa | n \in \mathbb{Z}, x \in R\}$ merupakan ideal dari R yang memuat a

BAB 9
RING FAKTOR

Misalkan R ring dan H ideal di R. Karena $\langle R, +\rangle$ merupakan grup abelian maka H subgrup normal dari R. Akibatnya untuk setiap $a \in R$ membentuk koset $a + H = H + a$. Berdasarkan teori grup, terbentuk grup faktor R/H dengan aturan operasi $(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$. Pada grup faktor R/H didefinisikan operasi perkalian dengan aturan $(a + H)(b + H) = ab + H$. Karena H merupakan ideal di R maka operasi tersebut terdefinisi dengan baik.

Teorema 9.1

Misalkan H subring dari R dan $a, b \in R$. Operasi $(a + H)(b + H) = ab + H$ terdefinisi dengan baik jika dan hanya jika H ideal dari R.

Bukti:

$\Rightarrow$ Diketahui H subring dari R dan operasi $(a + H)(b + H) = ab + H$ terdefinisi dengan baik.

Ditunjukkan H ideal dari R yaitu $\forall h \in H, r \in R$ berlaku $hr, rh \in H$

Ambil sebarang $r \in R$, diperoleh:

(i) $(r + H)H = (r + H)(0 + H) = r0 + H = 0 + H = H$, dan

(ii) $H(H + r) = (H + 0)(H + r) = H + 0r = H + 0 = H$

Di lain pihak, karena $h + H = H$ untuk setiap $h \in H$ diperoleh:

(iii) $(r + H)H = (r + H)(h + H) = rh + H$, dan

(iv) $H(H + r) = (H + h)(H + r) = H + hr$.

Dari (i) dan (iii) diperoleh $H = rh + H$, sehingga $rh \in H$.

Dari (ii) dan (iv) diperoleh $H = H + hr$, sehingg $hr \in H$.

Jadi terbukti bahwa H ideal dari R.

$\Leftarrow$ Diketahui H ideal dari R.

Akan ditunjukkan $(a + H)(b + H) = ab + H$ terdefinisi dengan baik, yaitu jika $a + H = a' + H$ dan $b + H = b' + H$ maka $ab + H = a'b' + H$.

Karena $a + H = a' + H$ maka $a' \in a + H$ sehingga $a' = a + h_1$ untuk suatu $h_1 \in H$

Karena $b + H = b' + H$ maka $b' \in b + H$ sehingga $b' = b + h_2$ untuk suatu $h_2 \in H$

Sehingga $a'b' = (a + h_1)(b + h_2) = ab + h_1 b + ah_2 + h_1 h_2$

Karena H ideal dari R maka $h_1 b, ah_2, h_1 h_2 \in H$

Sehingga $h_1 b + ah_2 + h_1 h_2 = h_3$ untuk suatu $h_3 \in H$ dan

$a'b' = ab + h_1 b + ah_2 + h_1 h_2 = ab + h_3$

Akibatnya $a'b' + H = (ab + h_3) + H = ab + H$

Jadi, operasi perkalian $(a + H)(b + H) = ab + H$ terdefinisi dengan baik.

Teorema 9.2
Misalkan R ring dan I ideal dari R. Maka $R/I = \{r + I | r \in r\}$ dengan operasi:
(i) $(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$, dan
(ii) $(a + H)(b + H) = ab + H$ untuk setiap $a, b \in R$, membentuk ring.
(Buktikan!)

Definisi 9.3 Ring Faktor
Jika R ring dan I ideal dari R maka ring R/I terhadap operasi yang dinyatakan pada Teorema 9.2 dinamakan ring faktor dari R modulo I. Elemen dari R/I berbentuk $r + I$ dan disimbolkan dengan $\bar{r}$.

Contoh 9.4
$\mathbb{Z}$ terhadap penjumlahan dan perkalian merupakan ring dan $I = n\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari Z.
Terbentuk ring faktor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{r + n\mathbb{Z} | r \in \mathbb{Z}\}$ dengan elemen netral $n\mathbb{Z}$ dan elemen satuan $1 + n\mathbb{Z}$.

Latihan Bab 9
1. Buktikan Teorema 9.2

BAB 10
TEOREMA RING FAKTOR

Teorema 10.1

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan M ideal dari R. M ideal maksimal jika dan hanya jika R/M lapangan.

Bukti:

$\Rightarrow$ Diketahui M ideal maksimal.
Ambil sebarang $\bar{a} = a + M \in R - \{\bar{0}\}$
Karena $a + M \neq 0$ maka $a \notin M$
Dibentuk $\langle a \rangle + M$
Maka $\langle a \rangle + M$ ideal dari R dan $M \subset \langle a \rangle + M$
Karena $a \notin M$ maka $\langle a \rangle + M \neq M$
Karena M ideal maksimal maka $\langle a \rangle + M = R$.
Akibatnya $1 \in \langle a \rangle + M$
Jadi $1 = ra + m$ untuk suatu $r \in R, m \in M$
Diperoleh $\bar{1} = \overline{ra} + \bar{m} = (ra + M) + M = ra + M = (r + M)(a + M)$
Jadi $a + M$ merupakan invers dari $r + M$ sehingga setiap elemen tak nol di R/M mempunyai invers
Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa R/M merupakan lapangan

$\Leftarrow$ Misalkan R/M lapangan maka $\bar{1} \in R/M - \{\bar{0}\}$
Akibatnya $1 \notin M$
Jadi $M \neq R$
Ambil sebarang I ideal dari R dengan $M \subset I \subset R$
Misalkan $I \neq R$
Akan ditunjukkan $I = M$. Oleh karena $M \subset I$ maka cukup ditunjukkan $I \subset M$ yaitu $\forall r \in I$ berlaku $r \in M$
Karena $I \neq R$ maka $1 \notin I$
Ambil sebarang $r \in I$
Akan ditunjukkan $r \in M$
Andaikan $r \notin M$ $maka$ $\bar{r} \neq \bar{0}$
Karena R/M lapangan maka terdapat $\bar{s} \in R/M$ sehingga $\overline{rs} = \bar{1}$
Karena I ideal dari $R, r \in I$ dan $s \in R$ maka $rs \in I$
Jadi $1 \in I$ sehingga $I = R$
Kontradiksi dengan $I \neq R$
Dengan demikian haruslah $r \in M$
Jadi $I \subset M$
Dengan demikian $I = M$

Jadi terbukti bahwa M merupakan ideal maksimal dari R

Misalkan R ring komutatif dan P ideal dari R. P dinamakan **ideal prima** apabila $P \neq R$ dan jika $ab \in P$ maka $a \in P$ atau $b \in P$. Suatu $p \in R$ dinamakan **elemen prima** apabila $\langle p \rangle$ merupakan ideal prima.

Teorema 10.2
Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan P ideal dari R.
P merupakan ideal prima jika dan hanya jika R/P daerah integral.
(Buktikan!)

Teorema 10.3
Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan I ideal dari R. Jika I ideal maksimal maka I ideal prima.
Bukti:
Dibuktikan kontraposisi dari pernyataan tersebut.
Misalkan I bukan ideal prima.

Maka terdapat $a, b \in R$ dengan $ab \in I$ tetapi $a \notin I$ dan $b \notin I$
Dibentuk $J = \{x \in R | ax \in I\}$
Maka J ideal dari R dan $I \subset J$
Karena $b \in J$ tetapi $b \notin I$ maka $I \neq J$
Karena $a \in I$ maka $1 \notin J$ sehingga $J \neq R$
Akibatnya I bukan ideal maksimal

Jadi dapat disimpulkan bahwa apabila I ideal maksimal maka I ideal prima

Latihan Bab 10

1. Buktikan Teorema 10.2
2. Tunjukkan bahwa apabila R ring dengan elemen satuan dan I ideal dari R dengan $I \neq R$ maka R/N ring dengan elemen satuan

BAB 11
HOMOMORFISMA RING

Definisi 11.1 Homomorfisma Ring
Diberikan ring $\langle R,+,\cdot\rangle$ dan $\langle S,\oplus,*\rangle$. Pemetaan $f\colon R\to S$ disebut **homomorfisma ring** jika untuk sebarang $a,b\in R$ berlaku:
1. $f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$
2. $f(ab)=f(a)*f(b)$

Di dalam definisi di atas, kita membedakan notasi dua operasi yang didefinisikan pada ring R dan S, tetapi di beberapa buku digunakan notasi yang sama. Untuk pembahasan berikutnya, kita tidak membedakan notasi dua operasi biner dari ring R dan S. Berikut ini diberikan beberapa contoh untuk memberikan penjelasan terhadap definisi di atas.

Contoh 11.2
Diberikan dua ring R dan S. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $f\colon R\to S$ dengan $f(a)=0$, untuk setiap $a\in R$.
Jelas untuk sebarang $a,b\in R$ berlaku $f(a+b)=0=0+0=f(a)+f(b)$ dan $f(a\cdot b)=0=0\cdot 0=f(a)\cdot f(b)$.
Jadi f merupakan homomorfisma ring.

Contoh 11.3
Diberikan ring R dan didefinisikan pemetaan $g:R\to R$ dengan $g(a)=a$, untuk setiap $a\in R$.
Jelas untuk sebarang $a,b\in R$ berlaku $g(a+b)=a+b=g(a)+g(b)$ dan $g(a\cdot b)=g(a)\cdot g(b)$.
Jadi pemetaan g merupakan homomorfisma ring.

Contoh 11.4
Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah ring dari semua bilangan bulat terhadap penjumlahan dan perkalian biasa, sedangkan S adalah ring dari semua bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan biasa dan perkalian yang didefinisikan dengan $a*b=\frac{ab}{2}$, untuk semua $a,b\in\mathbb{Z}$ dengan ab adalah perkalian biasa antara bilangan bulat a dan b. Pembaca dapat membuktikan bahwa $\langle S,+,*\rangle$ merupakan ring **(Buktikan!)**.
Selanjutnya didefinisikan pemetaan $h:\mathbb{Z}\to S$ dengan $h(a)=2a$, untuk setiap $a\in\mathbb{Z}$.
Dengan definisi pemetaan ini, maka untuk sebarang $a,b\in\mathbb{Z}$ berlaku

$$h(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = h(a) + h(b) \qquad \text{dan}$$
$$h(ab) = 2(ab) = \frac{(2a)(2b)}{2} = 2a * 2b = h(a) * h(b)$$
Jadi h merupakan homomorfisma ring.

Definisi 11.5

Diberikan ring R dan S. Homomorfisma ring $f : R \to S$ disebut

1. **Monomorfisma** jika f injektif (satu-satu) yaitu $\forall f(x), f(y) \in S$ dengan $f(x) = f(y)$ maka $x = y$
   Monomorfisma ring $f: R \to S$ juga sering disebut dengan istilah **embedding dari *R* ke *S***
2. **Epimorfisma** jika f surjektif (pada) yaitu $\forall y \in S$ terdapat $x \in R$ sedemikian hingga $f(x) = y$
3. **Isomorfisma** jika f bijektif (satu-satu dan pada).
   Isomorfisma ring $f : R \to R$ disebut **automorfisma**.

Contoh 11.6

Pada contoh 11.3 telah ditunjukkan bahwa pemetaan $g : R \to R$ didefinisikan oleh $g(a) = a$, untuk setiap $a \in R$ merupakan suatu homomorfisma ring.
Ambil sebarang $x \in R$ maka ada $x \in R$, sedemikian hingga $g(x) = x$.
Ini berarti g suatu pemetaan surjektif.
Ambil sebarang $a, b \in R$ dengan $g(a) = g(b)$.
Karena $g(a) = a$ dan $g(b) = b$ maka $a = b$.
Ini berarti g suatu pemetaan injektif.
Dengan demikian $g: R \to R$ merupakan automorfisma.

Contoh 11.7

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah ring bilangan bulat terhadap penjumlahan dan perkalian biasa. $\mathbb{Z}_5$ adalah ring dari kelas-kelas bilangan bulat modulo 5 dengan penjumlahan dan perkalian modulo 5
Pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ didefinisikan oleh $f(x) = \bar{x}$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$
Akan ditunjukkan bahwa f suatu epimorfisma dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_5$

- Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ maka $f(x) = \bar{x}$ dan $f(y) = \bar{y}$, sehingga
  $f(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = f(x) + f(y)$ dan
  $f(xy) = \overline{xy} = \bar{x} \cdot \bar{y} = f(x) \cdot f(y)$
  Jadi f suatu homomorfisma.
- Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_5$ maka terdapat $a \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $f(a) = \bar{a}$.
  Jadi f suatu pemetaan surjektif.

Sehingga $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ merupakan suatu epimorfisma.

Latihan Bab 11

1. Buktikan bahwa jika f merupakan homomorfisma ring dari ring komutatif R ke ring S, maka $f(R)$ merupakan subring komutatif dari ring S.
2. Misalkan R ring dengan elemen satuan dan S adalah sebarang ring serta f adalah epimorfisma ring dari R ke S. Buktikan bahwa $f(1)$ merupakan elemen satuan di S.
3. Buktikan bahwa jika f merupakan isomorfisma dari daerah integral D ke ring S, maka S juga merupakan daerah integral.

BAB 12
SIFAT HOMOMORFISMA RING

Sifat-sifat dasar dari homomorfisma ring akan dibahas di dalam sub bab ini, sedangkan aplikasi dan teorema-teorema yang lebih kompleks akan dibahas pada sub bab-sub bab berikutnya.

Teorema 12.1

Jika f merupakan homomorfisma ring dari ring R ke ring S, maka berlaku sifat-sifat:

1. $f(0) = 0$
2. $f(-a) = -f(a)$, untuk semua $a \in R$.

Bukti:

1. Jika a sebarang elemen di R, maka

$f(a) = f(a+0)$	sifat elemen nol di R
$\quad = f(a) + f(0)$	f homomorfisma ring

dan

$f(a) = f(0+a)$	sifat elemen nol di R
$\quad = f(0) + f(a)$	f homomorfisma ring

Jadi diperoleh $f(a) + f(0) = f(a) = f(0) + f(a)$, untuk setiap $f(a) \in S$.
Ini berarti $f(0) = 0$, yaitu elemen netral (nol) di dalam ring S.

2. Jika a sebarang elemen di R, maka

$0 = f(0)$	sifat 1
$\quad = f\big(a + (-a)\big)$	sifat elemen invers penjumlahan
$\quad = f(a) + f(-a)$	f homomorfisma ring

dan

$0 = f(0)$	sifat 1
$\quad = f(-a + a)$	sifat elemen invers penjumlahan
$\quad = f(-a) + f(a)$	f homomorfisma ring

Jadi diperoleh $f(a) + f(-a) = 0 = f(-a) + f(a)$, untuk setiap $f(a) \in S$.
Ini berarti $f(-a) = -f(a)$, untuk semua $a \in R$.

Di dalam teorema di atas tidak dibedakan elemen nol di R dan elemen nol di S, walaupun di dalam kenyataannya elemen ini berbeda.

Definisi 12.2 Kernel

Jika f merupakan homomorfisma ring dari ring R ke ring S, maka kernel dari f, ditulis $\text{Ker}(f)$, adalah himpunan semua elemen $a \in R$ sedemikian hingga $f(a) = 0$.

Homomorfisma f pada contoh 11.2 mempunyai $\text{Ker}(f) = R$, sedangkan homomorfisma g dan h pada contoh 11.3 dan contoh 11.4 masing-masing mempunyai $\text{Ker}(g) = \{0\}$ dan $\text{Ker}(h) = \{0\}$.

Teorema 12.3

Jika $f: R \to S$ merupakan homomorfisma ring, maka berlaku

1. Image dari f yaitu $f(R)$ merupakan subring dari ring S.
2. Kernel dari f yaitu $\text{Ker}(f)$ merupakan ideal dari ring R.

Bukti:

1. Ambil sebarang a' dan b' di dalam $f(R)$, maka terdapat a dan b di dalam R sedemikian hingga $a' = f(a)$ dan $b' = f(b)$.
   Selanjutnya karena R merupakan ring, maka $a - b = a + (-b) \in R$ dan $ab \in R$.
   Akibatnya berlaku
   $a' - b' = f(a) - f(b) = f(a) + f(-b) = f\big(a + (-b)\big) = f(a - b) \in f(R)$,
   dan
   $a'b' = f(a) \cdot f(b) = f(ab) \in f(R)$.
   Ini berarti $f(R)$ merupakan subring dari ring S.
2. Jelas bahwa $\text{Ker}(f)$ bukan merupakan himpunan kosong, karena $\text{ker}(f)$ paling sedikit memuat satu elemen yaitu 0, elemen nol di R.
   Sekarang diambil sebarang elemen $a, b \in \text{ker}(f)$ dan $r \in R$, sehingga $f(a) = 0$ dan $f(b) = 0$.
   Akibatnya diperoleh
   $f(a - b) = f\big(a + (-b)\big) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b) = 0 - 0 = 0$.
   Ini berarti $a - b \in \text{ker}(f)$.
   Selanjutnya $f(ar) = f(a) \cdot f(r) = 0 \cdot f(r) = 0$ dan
   $f(ra) = f(r) \cdot f(a) = f(r) \cdot 0 = 0$.
   Ini berarti bahwa $ar, ra \in \text{Ker}(f)$.
   Jadi $\text{ker}(f)$ merupakan ideal dari ring R.

Teorema 12.4

Jika R merupakan ring pembagian (*division ring*), maka R tidak mempunyai ideal sejati. Dengan kata lain ideal dari R adalah $\{0\}$ dan R sendiri.

Bukti:

Misalkan $I \subseteq R$ merupakan ideal sedemikian hingga $I \neq \{0\}$.

Jika $0 \neq a \in I$ dan $b \in R$ sebarang, maka persamaan $ax = b$ selalu mempunyai penyelesaian.

Akibatnya $b \in I$.

Ini berarti $I = R$.

Teorema 12.5

Jika R merupakan ring pembagian dan f merupakan homomorfisma ring dari ring R ke ring S, maka f injektif atau $f(R) = \{0\}$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 12.4, ideal dari ring pembagian R adalah $\{0\}$ atau R sendiri.

Padahal $\text{Ker}(f)$ juga merupakan ideal dari ring R, maka $\ker(f) = \{0\}$ atau $\text{Ker}(f) = R$.

Jika $\text{Ker}(f) = \{0\}$, maka f injektif, sebaliknya jika $\ker(f) = R$, maka $f(R) = \{0\}$.

Latihan Bab 12

1. Misalkan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$.

   Pemetaan $f: M \to M$ didefinisikan oleh $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, untuk setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M$.

   Tunjukkan bahwa f suatu homomorfisma dan tentukan kernelnya.

2. Misalkan $P = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ dan $Q = \left\{\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \middle| u, v, w \in \mathbb{R}\right\}$.

   Pemetaan $g: P \to Q$ didefinisikan oleh $g\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk setiap $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in P$.

   a. Tunjukkan bahwa g suatu homomorfisma
   b. Tentukan $g(P)$
   c. Tentukan $\text{Ker}(g)$

3. Misalkan $J\sqrt{2}$ adalah himpunan bilangan real yang berbentuk $m + n\sqrt{2}$, dengan m dan n bilangan bulat.

   a. Tunjukkan bahwa $J\sqrt{2}$ terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan real merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
   b. Didefinisikan $\phi: J\sqrt{2} \to J\sqrt{2}$ dengan $\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$, tunjukkan bahwa ϕ suatu epimorfisma
   c. Tentukan $\text{Ker}(\phi)$

BAB 13
TEOREMA UTAMA HOMOMORFISMA RING

Teorema 13.1
Jika $f: R \to R'$ homomorfisma ring dengan $\text{Ker}(f) = H$ maka $G/H \cong f(G)$
Bukti:
Definisikan $g: R/H \to f(R)$ dengan $g(r + H) = f(r)$ untuk setiap $r + H \in R$

(i) Ambil $r_1 + H, r_2 + H \in R/H$ dengan $r_1 + H = r_2 + H$

Diperoleh
$$\begin{aligned} r_1 + H = r_2 + H &\Leftrightarrow r_1 - r_2 \in H \\ &\Leftrightarrow f(r_1 - r_2) = 0' \\ &\Leftrightarrow f(r_1) - f(r_2) = 0' \\ &\Leftrightarrow f(r_1) = f(r_2) \\ &\Leftrightarrow g(r_1 + H) = g(r_2 + H) \end{aligned}$$

Jadi g merupakan pemetaan.

(ii) Ambil sebarang $r_1 + H, r_2 + H \in R/H$

Diperoleh
$$\begin{aligned} g\big((r_1 + H) + (r_2 + H)\big) &= g\big((r_1 + r_2) + H\big) \\ &= f(r_1 + r_2) \\ &= f(r_1) + f(r_2) \\ &= g(r_1 + H) + g(r_2 + H) \end{aligned}$$

dan
$$\begin{aligned} g\big((r_1 + H)(r_2 + H)\big) &= g\big((r_1 r_2) + H\big) \\ &= f(r_1 r_2) \\ &= f(r_1)f(r_2) \\ &= g(r_1 + H)g(r_2 + H) \end{aligned}$$

Jadi g merupakan homomorfisma ring.

(iii) Misalkan $r_1 + H, r_2 + H \in R/H$ dengan $r_1 + H \neq r_2 + H$

Diperoleh
$$\begin{aligned} r_1 + H \neq r_2 + H &\Leftrightarrow r_1 - r_2 \notin H \\ &\Leftrightarrow f(r_1 - r_2) \neq 0' \\ &\Leftrightarrow f(r_1) - f(r_2) \neq 0' \\ &\Leftrightarrow f(r_1) \neq f(r_2) \\ &\Leftrightarrow g(r_1 + H) \neq g(r_2 + H) \end{aligned}$$

Jadi g injektif.

(iv) Ambil sebarang $y \in f(R)$

Maka terdapat $x \in R$ sehingga $f(x) = y$

Karena $x \in R$ maka $x + H \in R/H$

Diperoleh $g(x + H) = f(x) = y$

Jadi g surjektif.

Berdasarkan (i) sampai (iv) diperoleh g merupakan isomorfisma. Jadi terbukti bahwa $R/H \cong f(R)$.

Berdasarkan Teorema 13.1, untuk menunjukkan suatu ring faktor R/H isomorfik dengan ring R', cukup ditunjukkan adanya epimorfisma $f: R \rightarrow R'$ dengan $\text{Ker}(f) = H$.

Contoh 13.2

Ring faktor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorfik dengan ring $\mathbb{Z}_n$

Bukti:

Didefinisikan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ dengan $f(x) = \bar{x}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$

(i) Jika $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a = b$ maka $f(a) = \bar{a} = \bar{b} = f(b)$
Jadi f merupakan pemetaan

(ii) Jika $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $f(a+b) = \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} = f(a) + f(b)$ dan $f(ab) = \overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b} = f(a)f(b)$
Jadi f homomorfisma ring

(iii) Ambil sebarang $\bar{y} \in \mathbb{Z}_n$ maka terdapat $y \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $f(y) = \bar{y}$
Jadi f surjektif

(iv) $\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{Z} | f(x) = \bar{0}\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} | \bar{x} = \bar{0}\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} | x = nk, k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$
$= n\mathbb{Z}$

Diperoleh f epimorfisma dengan $\text{Ker}(f) = n\mathbb{Z}$ sehingga berdasarkan Teorema Utama Homomorfisma Ring dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$

BAB 14
RING POLINOMIAL

Definisi 14.1
Misalkan R ring. **Polinom $\boldsymbol{f(x)}$ dengan koefisien di $\boldsymbol{R}$ dan indeterminate $\boldsymbol{x}$** adalah jumlahan tak hingga $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ dengan $a_i = 0$ kecuali sebanyak berhingga nilai i. a_i dinamakan **koefisien** dari $f(x)$. $Max\{i|a_i \neq 0\}$ dinamakan **derajat** dari $f(x)$ dan disimbolkan dengan $\delta\big(f(x)\big)$. Jika $a_i = 0$ untuk semua i maka $\delta\big(f(x)\big)$ tidak didefinisikan.

Untuk menyederhanakan dalam bekerja dengan polinomial, disepakati jika $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ memiliki $a_i = 0$ untuk $i > n$, maka polinom tersebut ditulis sebagai $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Jika R mempunyai elemen satuan $1 \neq 0$, maka suku $1x^k$ akan ditulis sebagai x^k. Apabila $f(x) = r$ untuk suatu $r \in R$ maka $f(x)$ disebut **polinom konstan**. Himpunan yang memuat semua polinom atas R dengan indeterminate x disimbolkan dengan $R[x]$.

Pada $R[x]$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial dengan ketentuan untuk setiap $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$ di $R[x]$ berlaku

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \text{ dengan } c_n = a_n + b_n \\ f(x)g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots \text{ dengan } d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \end{cases}$$

Teorema 14.2
Jika R ring maka $R[x]$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial merupakan ring.

Bukti:

(i) Jelas $\langle R[x], + \rangle$ merupakan grup komutatif

(ii) - Berdasarkan definisi operasi perkalian jelas bahwa operasi perkalian bersifat tertutup
- Ditunjukkan operasi perkalian bersifat asosiatif

  Misalkan $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ dan $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ dengan $a_i, b_j, c_k \in R$ dan $a_i, b_j, c_k = 0$ kecuali sebanyak berhingga nilai i, j dan k.

Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
[f(x)g(x)]h(x) &= \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n\right]\sum_{i=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{s}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)c_{s-n}\right]x^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k\right)x^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{s} a_{s-m}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j c_{m-j}\right)\right]x^s \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left[\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j c_{m-j}\right)x^m\right] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)\right] \\
&= f(x)[(g(x)h(x)]
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa oeprasi perkalan pada $R[x]$ bersifat asosiatif.

- Ditunjukkan kedua operasi bersifat distributif. ***(Buktikan!)***

Teorema 14.3

Misalkan F subfield dari field E dan sebarang $\alpha \in E$. Didefinisikan pemetaan $\phi_\alpha: F[x] \to E$ dengan $\phi_\alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n)$ untuk setiap $(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \in f[x]$ merupakan homomorfisma ring, dan selanjutnya dinamakan **homomorfisma evaluasi**. ***(Buktikan!)***

$\mathrm{Ker}(\phi_\alpha) = \{f(x) \in F[x] | f(\alpha) = 0\}$.

Contoh 14.4

Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, $\mathbb{Q}$ merupakan subfield dari $\mathbb{R}$. Apabila diambil $2 \in \mathbb{R}$ maka diperoleh homomorfisma evaluasi $\phi_2: \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ dengan $\phi_2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$. Diperoleh $\phi_2(x^2 + x - 6) = 2^2 + 2 - 6 = 0$, sehingga $f(x) = x^2 + x - 6$ merupakan elemen di $\mathrm{Ker}(\phi_2)$.

Contoh 14.5

Didefinisikan homomorfisma evaluasi $\phi_\pi: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{R}$.
Maka $\phi_\pi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1 \cdot \pi + a_2 \cdot \pi^2 + \cdots + a_n \cdot \pi^n$.
Jelas $a_0 + a_1 \cdot \pi + a_2 \cdot \pi^2 + \cdots + a_n \cdot \pi^n = 0$ jika dan hanya jika $a_i = 0$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$ maka $\mathrm{Ker}(\phi_\pi) = \{0\}$ sehingga ϕ_π merupakan pemetaan injektif.

Latihan Bab 14

Untuk nomor 1 sampai dengan 4, tentukan jumlah dan hasil kali polinomial yang ada pada ring polinomial yang diberikan.

1. $f(x) = 4x - 5, g(x) = 2x^2 - 4x + 2$ pada $\mathbb{Z}_8[x]$.
2. $f(x) = x + 1, g(x) = x + 1$ pada $\mathbb{Z}_2[x]$.
3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 4, g(x) = 3x^2 + 2x + 3$ pada $\mathbb{Z}_6[x]$.
4. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x = 2, g(x) = 3x^4 + 2x + 4$ pada $\mathbb{Z}_5[x]$.

Untuk nomor 5 dan 6, terapkan teorema 14.3 dengan $F = E = \mathbb{C}$. Hitunglah untuk homomorfisma evaluasi yang ada.

5. $\phi_2(x^2 + 3)$
6. $\phi_i(2x^3 - x^2 + 3x + 2)$
7. Buktikan bahwa jika D merupakan daerah intergral, maka $D[x]$ juga merupakan daerah integral.
8. Lengkapi sebagian bukti teorema 14.2 yaitu buktikan hukum distributif kiri untuk $R[x]$

BAB 15
FAKTORISASI POLINOM ATAS FIELD

Definisi 15.1
Misalkan F subfield dari E dan $\alpha \in E$.
Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in F[x]$ dan $\phi_\alpha : F[X] \to E$ homomorfisma evaluasi.
Jika $f(\alpha) = \phi_\alpha(f(x)) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0$ maka α dinamakan pembuat nol dari $f(x)$.

Berdasarkan definisi 15.1, misalkan $f(x) \in F[x]$ dapat difaktorkan sedemikian sehingga $f(x) = g(x)h(x)$ dengan $g(x), h(x) \in F[x]$. Selanjutnya, berdasarkan homomorfisma evaluasi ϕ_α untuk suatu $\alpha \in E$ diperoleh $f(\alpha) = \phi_\alpha(f(x)) = \phi_\alpha(g(x)h(x)) = \phi_\alpha(g(x))\phi_\alpha(h(x)) = g(\alpha)h(\alpha)$. Jelas $f(\alpha) = 0$ jika dan hanya jika $g(\alpha) = 0$ atau $h(\alpha) = 0$. Dengan demikian, mencari pembuat nol suatu polinom sama dengan mencari pembuat nol faktor-faktor dari polinom tersebut.

Teorema 15.2
Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ dengan $b_m \neq 0$ dan $m > 0$.
Maka terdapat polinom tunggal $q(x)$ dan $r(x)$ sedemikian hingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau $\delta(r(x)) < \delta(g(x))$.

Bukti:
Diketahui $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ dengan $b_m \neq 0$.
Misalkan $S = \{f(x) - g(x)s(x) | s(x) \in F[x]\}$

Kasus 1 $0 \in S$

Karena $0 \in S$ maka terdapat $s_1(x) \in F[x]$ sehingga $f(x) - g(x)s_1(x) = 0$
Dengan mengambil $q(x) = s_1(x)$ dan $r(x) = 0$ maka diperoleh
$f(x) = g(x)s_1(x) + 0 = g(x)q(x) + r(x)$

Kasus 2 $0 \neq S$

Karena $0 \neq S$ maka $f(x) - g(x)s(x) \neq 0$ untuk setiap $s(x) \in F[x]$
Akibatnya S memuat polinom berderajat lebih dari atau sama dengan 0.
Misalkan $r(x) = f(x) - g(x)q(x)$ polinom berderajat terkecil dalam S dengan $\delta(r(x)) = t$
Maka $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t$ dengan $c_t \neq 0$
Diperoleh $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

Ditunjukkan $t = \delta\big(r(x)\big) < \delta\big(g(x)\big) = m$

Andaikan $t \geq m$

Karena $b_m \in F, b_m \neq 0$ dan F field, maka terdapat ${b_m}^{-1} \in F$ sehingga $b \cdot {b_m}^{-1} = 1$

Diperoleh:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$
$$f(x) - g(x)q(x) = r(x)$$
$$f(x) - g(x)q(x) - \left(c_t {b_m}^{-1}\right)x^{t-m}g(x) = r(x) - \left(c_t {b_m}^{-1}\right)x^{t-m}g(x)$$
$$f(x) - g(x)\left[q(x) + \left(c_t {b_m}^{-1}\right)x^{t-m}\right] = r(x) - \left(c_t {b_m}^{-1}\right)x^{t-m}g(x)$$

Hal ini menunjukkan bahwa $r(x) - \left(c_t {b_m}^{-1}\right)x^{t-m}g(x) \in S$

Tetapi $\delta\left(r(x) - \left(c_t {b_m}^{-1}\right)x^{t-m}g(x)\right) < t$

Bertentangan dengan $r(x)$ merupakan polinom berderajat terkecil di S

Dengan demikian terbukti bahwa $\delta\big(r(x)\big) < \delta\big(g(x)\big)$

Selanjutnya akan ditunjukkan ketunggalan $q(x)$ dan $r(x)$ sebagai berikut.
Misalkan $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$ dan $f(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x)$
Maka $g(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x)$
Karena $r_2(x) - r_1(x) = 0$ atau $\delta\big(r_2(x) - r_1(x)\big) < \delta\big(g(x)\big)$ maka haruslah $q_1(x) - q_2(x) = 0$ sehingga $q_1(x) = q_2(x)$
Selanjutnya haruslah $r_2(x) - r_1(x) = 0$ sehingga $r_1(x) = r_2(x)$
Jadi telah dibuktikan terdapat polinom tunggal $q(x)$ dan $r(x)$ sedemikian hingga $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dengan $r(x) = 0$ atau $\delta\big(r(x)\big) < \delta\big(g(x)\big)$.

Contoh 15.3

Pada $\mathbb{Z}[x]$, misalkan $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 7$, $g(x) = x + 1$

Diperoleh

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 2 \\
\hline
x + 1 & x^3 + 4x^2 + 5x + 7 \\
 & x^3 + x^2 \\
\hline
 & \quad 3x^2 + 5x \\
 & \quad 3x^2 + 3x \\
\hline
 & \qquad 2x + 7 \\
 & \qquad 2x + 2 \\
\hline
 & \qquad\quad 5
\end{array}$$

Jadi $q(x) = x^2 + 3x + 2$ dan $r(x) = 5$

Contoh 15.4

Pada $\mathbb{Z}_5[x]$, misalkan $f(x) = x^4 - \overline{3}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{4}x - \overline{1}$, $g(x) = x^2 - \overline{2}x + \overline{3}$

Diperoleh

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x - \overline{3} \\
\hline
x^2 - \overline{2}x + \overline{3} & x^4 - \overline{3}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{4}x - \overline{1} \\
 & x^4 - \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -x^3 - x^2 + \overline{4}x \\
 & \quad -x^3 + \overline{2}x^2 - \overline{3}x \\
\cline{2-2}
 & \qquad -\overline{3}x^2 + \overline{2}x - \overline{1} \\
 & \qquad -\overline{3}x^2 + x - \overline{4} \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad x + \overline{3}
\end{array}
$$

Jadi $q(x) = x^2 - x - \overline{3}$ dan $r(x) = x + \overline{3}$

Akibat 15.5

Suatu $a \in F$ merupakan pembuat nol dari $f(x)$ di $F[x]$ jika dan hanya jika $x - a$ faktor dari $f(x)$ di $F[x]$. ***(Buktikan!)***

Akibat 15.6

Suatu polinom tak nol $f(x) \in F[x]$ dengan $\delta\big(f(x)\big) = n$ mempunyai paling banyak n pembuat nol di F.

Bukti:

Diketahui $f(x) \in F[x]$ dengan $\delta\big(f(x)\big) = n$.

Misalkan $a_1 \in F$ pembuat nol dari $f(x)$.

Maka berdasarkan Akibat 15.5, $f(x) = (x - a_1)q_1(x)$ dengan $\delta\big(q_1(x)\big) = n - 1$.

Misalkan $a_2 \in F$ pembuat nol dari $q_1(x)$.

Maka $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x)$ dengan $\delta\big(q_2(x)\big) = n - 2$.

Dengan melanjutkan proses tersebut diperoleh

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_r)q_r(x)$ dengan $q_r(x)$ tidak mempunyai pembuat nol di F.

Karena $\delta\big(f(x)\big) = n$ maka paling banyak terdapat r faktor berbentuk $(x - a_i)$ di ruas kanan dengan $r \leq n$.

Sebaliknya, karena F tidak mempunyai pembagi nol maka apabila $b \neq a_i$ untuk $i = 1,2, \dots, r$ mengakibatkan $f(b) = (b - a_1)(b - a_2) \dots (b - a_r)q_r(b) \neq 0$.

Dengan demikian pembuat nol dari $f(x)$ hanyalah $a_1, a_2, \dots, a_r$ dengan $r \leq n$.

Latihan Bab 15

Untuk nomor 1 sampai dengan 3, tentukan $q(x)$ *dan* $r(x)$ *sehingga* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ *dengan* $r(x) = 0$ *atau* $\delta\big(r(x)\big) < \delta\big(g(x)\big)$

1. $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 1, g(x) = 3x + 2$ pada $\mathbb{Q}[x]$.
2. $f(x) = x^6 + \bar{3}x^5 + \bar{4}x^2 - \bar{3}x + \bar{2}, g(x) = x^2 + \bar{2}x - \bar{3}$ pada $\mathbb{Z}_7[x]$.
3. $f(x) = x^5 - \bar{2}x^4 + \bar{3}x - \bar{5}, g(x) = \bar{2}x + \bar{1}$ pada $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

BAB 16
POLINOM TEREDUKSI-TAK TEREDUKSI

Definisi 16.1
Suatu polinom tak konstan $f(x) \in F[x]$ dinamakan tak tereduksi atas F apabila $f(x)$ tidak dapat dinyatakan sebagai hasil kali dua polinom $g(x)$ dan $h(x)$ di $F[x]$ dengan $\delta\big(g(x)\big)$ dan $\delta\big(h(x)\big)$ kurang dari $\delta\big(f(x)\big)$. Sebaliknya, apabila terdapat $g(x)$ dan $h(x)$ di $F[x]$ sehingga $f(x) = g(x)h(x)$ dengan $\delta\big(g(x)\big)$ dan $\delta\big(h(x)\big)$ kurang dari $\delta\big(f(x)\big)$ maka $f(x)$ dinamakan polinom tereduksi.

Contoh 16.2
$f(x) = x^2 + 1$ merupakan polinom tak tereduksi di $\mathbb{R}[x]$ tetapi tereduksi di $\mathbb{C}[x]$ karena $f(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ dengan $i^2 = -1$.

Teorema 16.3
Misalkan $f(x) \in F[x]$ dan $\delta\big(f(x)\big)$ sama dengan 2 atau 3. Maka $f(x)$ tak tereduksi di F jika dan hanya jika $f(x)$ mempunyai pembuat nol di F.
Bukti:

$\Rightarrow$ Misalkan $f(x)$ tereduksi atas F.
Maka $f(x) = g(x)h(x)$ dengan $g(x), h(x) \in F[x]$ serta $\delta\big(g(x)\big)$ dan $\delta\big(h(x)\big)$ keduanya kurang dari $\delta\big(f(x)\big)$.
Karena $\delta\big(f(x)\big)$ bernilai 2 atau 3 maka $\delta\big(g(x)\big)$ dan $\delta\big(h(x)\big)$ bernilai 1 atau 2.
Misalkan $\delta\big(g(x)\big) = 1$.
Maka $g(x) = x - a$ untuk suatu $a \in F$.
Akibatnya $g(a) = 0$ sehingga $f(a) = g(a)h(a) = 0 \cdot h(a) = 0$.
Jadi $f(x)$ mempunyai pembuat nol di F.

$\Leftarrow$ Misalkan $f(x)$ mempunyai pembuat nol di F.
Maka terdapat $a \in F$ sehingga $f(a) = 0$.
Berdasarkan akibat 15.5, diperoleh $x - a$ faktor dari $f(x)$.
Jadi $f(x)$ tereduksi.

Latihan Bab 16

1. Faktorkan $f(x) = x^4 + \bar{4}$ pada $\mathbb{Z}_5[x]$!
2. Faktorkan $f(x) = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$ pada $\mathbb{Z}_7[x]$!
3. Faktorkan $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 - \bar{7}x - \bar{5}$ pada $\mathbb{Z}_{11}[x]$!
4. Apakah $f(x) = x^3 + \bar{2}x + \bar{3}$ tak tereduksi pada $\mathbb{Z}_5[x]$? Jika tereduksi, faktorkan $f(x)$!
5. Apakah $f(x) = \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$ tak tereduksi pada $\mathbb{Z}_5[x]$? Jika tereduksi, faktorkan $f(x)$!

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. (2014). *Ring, Field, dan Daerah Integral Edisi Revisi*. Universitas Brawijaya Press.

Fraleigh, J. B., Brand, N. (2020). *A First Course in Abstract Algebra*. Pearson Education.

Gallian, J. A. (2021). *Contemporary Abstract Algebra*. Chapman and Hall/CRC Press.

Gallian, J. A. (2021). *Student Solutions Manual for Gallian's Contemporary Abstract Algebra*. Chapman and Hall/CRC Press.

Isnarto. (2008). *Pengantar Struktur Aljabar 2*. Unnes

Jaisingh, L. R., Ayres, F. (2003). *Schaum's Outline of Abstract Algebra*. McGraw Hill LLC.

Pinter, C. C. (2010). *A Book of Abstract Algebra*. Courier Corporation.

Setiawan, A. (2014). *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring*. Tisara Grafika.

Thompson, R. C., Yaqub, A. (1970). *Introduction to Abstract Algebra*. Scott, Foresman.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori Ring dan Modul*. UGM PRESS.

Mata kuliah Teori Ring merupakan mata kuliah lanjutan dari mata kuliah Struktur Aljabar yang telah membahas konsep Grup. Pemberian mata kuliah Teori Ring pada mahasiswa pendidikan matematika bertujuan untuk mengembangkan pemahaman mahasiswa tentang konsep dasar struktur aljabar khususnya yang dilengkapi dengan 2 (dua) operasi biner. Penekanan mata kuliah ini pada kemampuan berfikir logis dan bernalar secara matematika dalam menyelesaikan masalah.

Mata kuliah ini dimaksudkan untuk memperkenalkan metode pemberian aksioma melalui perbincangan dari struktur aljabar. Isi pokok bahan ajar mata kuliah Teori Ring meliputi pemahaman tentang: (a) Ring atau Gelanggang; (b) Lapangan dan Daerah Integral, (c) Subring, Ideal dan Ring Faktor, dan (d) Homomorfisma Ring dan Teoremanya.

Untuk memudahkan kegiatan perkuliahan, disusunlah bahan ajar untuk Teori Ring ini dengan memperhatikan prinsip-prinsip dari teori beban kognitif (*cognitive load theory*).

Dwi Cahyani Nur Apriyani, M.Pd., lahir di Kabupaten Pacitan, Jawa Timur pada tanggal 8 Nopember 1985. Menyelesaikan pendidikan jenjang S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang dan jenjang S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika Program Pascasarjana Universitas Negeri Sebelas Maret Surakarta. Saat ini penulis aktif mengajar pada Program Studi Pendidikan Matematika di Kampus Pendidik STKIP PGRI Pacitan.

LPPM Press
STKIP PGRI PACITAN

ISBN: xxx-xxxx-xx-x